Exercice 11 1. On note F, la fonction de répartition d'une variable aléatoire réelle W, i.e. $F(z) = \mathbb{P}(W \leq z)$. Montrer que F est (toujours !) continue à droite. A quelle condition F est elle continue en un point z ?

▶ **Corrigé:**

On remarque que $F(z) = \mathbb{E}\left(\mathbf{1}_{\{W\leq z\}}\right)$. *En considérant un suite* $h_n > 0$ *tendant vers* 0, *on a*

$$\lim_n \mathbf{1}_{\{W\leq z+h_n\}} = \mathbf{1}_{\{W\leq z\}},$$

et le théorème de Lebesgue donne $\lim_n F(z+h_n) = F(z)$. *Par ailleurs, toujours pour une suite* $h_n > 0$, *on a*

$$\lim_n \mathbf{1}_{\{W\leq z-h_n\}} = \mathbf{1}_{\{W< z\}},$$

et l'on obtient $\lim_n F(z-h_n) = \mathbb{E}\left(\mathbf{1}_{\{W<z\}}\right)$. *On en déduit que* F *admet une limite à gauche et que* F *est continue en* z *si et seulement si* $\mathbb{P}(W=z)=0$. ◀

2. Montrer que si u et w sont deux nombres réels positifs, on a $\int_0^u \mathbf{1}_{\{w\leq z\}}dz = (u-w)_+$. En déduire que, si W est une variable aléatoire positive :

$$\mathbb{E}\left((u-W)_+\right) = \int_0^u F(z)dz,$$

où $F(z) = \mathbb{P}(W \leq z)$ est la fonction de répartition de W.

▶ **Corrigé:**

Si $0 \leq u \leq w$, *on a bien sur* $\int_0^u \mathbf{1}_{\{w\leq z\}}dz = 0 = (u-w)_+$. *Si* $0\leq w \leq u$, $\int_0^u \mathbf{1}_{\{w\leq z\}}dz = \int_w^u dz = (w-u) = (w-u)_+$.

En appliquant le précédent résultat puis le théorème de Fubini, on obtient

$$\mathbb{E}\left((u-W)_+\right) = \mathbb{E}\left(\int_0^u \mathbf{1}_{\{W\leq z\}}dzdz\right) = \int_0^u \mathbb{P}(W\leq z)dz.$$

◀

Exercice 12 On suppose que c_M, c et c_S sont des nombres réels positifs et W une variable aléatoire positive. On définit, comme dans le cours, la perte moyenne résultant d'une commande en quantité u positive

$$J(u) = \mathbb{E}\left[c_F\mathbf{1}_{\{u>0\}} + cu + c_S(u-W)_+ + c_M(W-u)_+\right].$$

1. Vérifier que $J(u) = c_F\mathbf{1}_{\{u>0\}} + c_M\mathbb{E}(W) + (c-c_M)u + (c_M+c_S)\mathbb{E}\left((u-W)_+\right)$.

▶ **Corrigé:**

La formule découle du fait que $(u-W)_+ - (W-u)_+ = u-W$ *et de la linéarité de l'espérance.*

◀

2. Montrer que $J(u) = c_M\mathbb{E}(W) + (c-c_M)u + (c_M+c_S)\int_0^u F(z)dz$ et que J est continue et admet une dérivée à droite en tout point.

▶ **Corrigé:**

L'exercice précédent permet d'obtenir la formule demandée.

Comme F *est continue à droite, on en déduit que* J *est dérivable à droite en tout point* u *et que cette dérivée vaut*

$$J'_d(u) = (c-c_M) + (c_M+c_S)F(u).$$

◀

3. On pose
$$u^* = \inf\left\{z \in \mathbb{R}^+, F(z) \geq \frac{c_M - c}{c_M + c_S}\right\}.$$
Montrez que, si W ne prend que des valeurs entières strictement positives, u^* prend lui aussi une valeur entière strictement positive.

   ▶ **Corrigé:**
   Lorsque W ne prend que des valeurs entières strictement positives $F(z)$ ne peut croître que lorsque z est entier strictement positif. F étant continue à droite, u^* est donc entier strictement positif. ◀

4. Montrez que, si $c_M > c$, alors $u^* > 0$ et J est décroissante lorsque $u \in [0, u^*]$ et croissante si $u \geq u^*$ (elle atteint donc son minimum en u^*).

   ▶ **Corrigé:**
   La dérivée à droite de J en u est donnée par $J'_d(u) = (c - c_M) + (c_M + c_S)F(u)$. $J'_d(u)$ est croissante et u^* est la plus petite valeur où $J'_d(u) \geq 0$. On a donc $J'_d(u) < 0$ pour $u < u^*$ (J est décroissante avant u^*) et $J'_d(u) \geq 0$ pour $u \geq u^*$ (J est croissante après u^*). Ce qui permet de conclure. ◀

5. Montrer que si $c_M \leq c$ alors J est une fonction croissante sur $\mathbb{R}^+$ (elle atteint donc son minimum en 0).

   ▶ **Corrigé:**
   Dans ce cas $J'_d(u) \geq 0$ pour tout $u \geq 0$. J est bien une fonction croissante dont le minimum est obtenu en 0. ◀

Exercice 13 On s'intéresse maintenant à la fonction (dépendant de x) $\tilde{J}^x$, représentant la perte moyenne lorsque le stock initial est égal à x, définie par
$$\tilde{J}^x(u) = \mathbb{E}\left[c_F \mathbf{1}_{\{u>0\}} + cu + c_S(x + u - W)_+ + c_M(W - x - u)_+\right].$$

1. Vérifier que $\tilde{J}^x(u) = c_F \mathbf{1}_{\{u>0\}} + J(u + x) - cx$.

   ▶ **Corrigé:**
   En reprenant les notation de l'exercice précédent pour J, il est facile de vérifier la formule demandée. ◀

On suppose dans la suite que $c_M > c$. On note S pour l'unique point qui réalise $\mathrm{argmin}_{u \geq 0} J(u)$.

2. Lorsque $x \geq S$, vérifier que pour tout $u > 0$ $\tilde{J}^x(0) \leq \tilde{J}^x(u)$. *Il est optimal de ne rien commander.*

   ▶ **Corrigé:**
   Comme $x \geq S$, $J(x) \leq J(x + u)$ (J est croissante après S), on a, pour tout $u \geq 0$
   $$\tilde{J}^x(0) = J(x) - cx \leq c_F + J(u + x) - cx = \tilde{J}^x(u).$$
   Ce qui signifie qu'il est optimal de ne rien commander. ◀

3. Lorsque $x \leq S$ et $J(x) < c_F + J(S)$, vérifier que pour tout $u > 0$ $\tilde{J}^x(0) \leq \tilde{J}^x(u)$. *Il est, là aussi, optimal de ne rien commander.*

   ▶ **Corrigé:**
   On a (J est minimum en S)
   $$\tilde{J}^x(0) = J(x) - cx \leq c_F + J(S) - cx \leq c_F + J(x + u) - cx \leq \tilde{J}^x(u).$$
   Là aussi, il est optimal de ne rien commander. ◀

4. Lorsque $x \leq S$ et $J(x) > c_F + J(S)$, vérifier que pour tout $u > 0$ $\tilde{J}^x(u) \geq \tilde{J}^x(S-x)$. *Il est optimal de commander la quantité $S - x$.*

   ▶ **Corrigé:**
   On a, pour tout $u > 0$

   $$\tilde{J}^x(u) = c_F + J(x+u) - cx \geq c_F + J(S) - cx = \tilde{J}^x(S-x).$$

   Comme pour $u = 0$, $\tilde{J}^x(0) = J(x) - cx > c_F + J(S) - cx = \tilde{J}^x(S-x)$, il est donc optimal de commander la quantité $S - x$. ◀

5. On définit s par (notez que s est forcément inférieur à S par définition)

   $$s = \sup \{z \leq S, J(z) \geq c_F + J(S)\}.$$

   Vérifier que, pour $x \leq S$, $J(x) \geq c_F + J(S)$ est équivalent à $x \leq s$. En déduire que la commande optimale $u^*(x)$ partant d'un stock initial x est donnée par

   $$u^*(x) = (S-x)\mathbf{1}_{\{x \leq s\}}.$$

   ▶ **Corrigé:**
   Si $x \leq S$ et $J(x) \geq c_F + J(S)$, on a, bien sûr, $x \leq s$.
   Réciproquement, comme J est continue $J(s) = c_F + J(S)$. De plus J est décroissante avant S, donc si $x \leq s$, $J(x) \geq J(s) = c_F + J(S)$.
   En regroupant les résultats de l'exercice, on obtient la formule demandée pour u^*. ◀